

CASO 2) El grado del polinomio del numerador es menor al grado del polinomio del denominador. Este caso se resuelve por el METODO DE DESCOMPOSICION EN FRACCIONES SIMPLES, y encontramos dos tipos:

TIPO A: con raíces reales únicas en el polinomio del denominador.

TIPO B: con raíces reales múltiples en el polinomio del denominador.

EJEMPLO 4: Calcular $\int \frac{2x+5}{x^2+2x-3} dx$

Factorizando el denominador obtenemos dos raíces reales distintas simples: $x_1=1$ y $x_2=-3$. Reescribiendo la integral dada nos queda:

$\int \frac{2x+5}{(x-1)(x+3)} dx$, estamos en el caso 2) del tipo A.

Plantemos la descomposición:

$$\frac{2x+5}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}, \text{ usamos una letra por cada raíz simple y operamos!}$$

$$= \frac{A(x+3) + B(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{Ax+3A+Bx-B}{(x-1)(x+3)} = \frac{(A+B)x + (3A-B)}{(x-1)(x+3)}$$

Por igualación de polinomios resulta el siguiente sistemita:

$$\begin{cases} A+B=3 \\ 3A-B=5 \end{cases} \rightarrow B=3A-5$$

$$A+B = A+3A-5 = 3$$

$$4A-5=3 \rightarrow A=2$$

$$y B=1$$

Sustituyendo los valores de A y B obtenidos en la descomposición:

$$\frac{2x+5}{(x-1)(x+3)} = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+3}$$

Luego, reemplazamos en la función integrando y calculamos:

$$\int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+3} \right) dx \stackrel{\text{prop. de integrales}}{=} \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{1}{x+3} dx \stackrel{\text{prop. de integrales}}{=} 2 \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+3} =$$

$$= 2 \cdot \ln(x-1) + \ln(x+3) + C = \ln(x-1)^2 + \ln(x+3) + C = \ln \frac{(x-1)^2}{x+3} + C$$